



TD n°11: Fonctions harmoniques

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un  sont à faire en priorité, ceux marqués d'un  sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Fonctions harmoniques.

Exercice 1. Retour sur le noyau de Poisson.

1. Démontrer que le noyau de Poisson

$$P(z, \zeta) = \Re \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

est donné par

$$P(re^{it}, e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{ni(t-\theta)}$$

et utilisez cette formule pour redémontrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \zeta) d\theta = 1.$$

On écrit $z = re^{it}$, $\zeta = e^{i\theta}$. Comme $|z| < 1$, $\zeta = 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} &= (1 + z/\zeta) \frac{1}{1 - z/\zeta} \\ &= (1 + z/\zeta) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^n \\ &= 1 + 2 \sum_{n \geq 1} r^n e^{ni(t-\theta)}. \end{aligned}$$

La partie réelle de $2r^n e^{ni(t-\theta)}$ étant $r^n e^{ni(t-\theta)} + r^n e^{-ni(t-\theta)}$, on a la formule voulue. Pour la deuxième partie de la question, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \zeta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \int_0^{2\pi} e^{ni(t-\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} 2\pi \mathbf{1}_{n=0} = 1. \end{aligned}$$

2. Soit $\phi \in L^1(\mathbb{U}, \mathbb{R})$ une fonction intégrable sur le cercle. Démontrons que pour $r < 1$, on a

$$P_{\mathbb{D}} \phi(re^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n r^{|n|} e^{nit}$$

où les $(a_n)_n$ sont une suite bornée de nombres complexes vérifiant $a_{-n} = \bar{a}_n$, que l'on explicitera.

On écrit explicitement

$$P_{\mathbb{D}} \phi(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Comme $\phi \in L^1$, $\theta \mapsto \phi(e^{i\theta}) e^{-in\theta}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$. Il suffit de poser $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$. Étant donné que ϕ est à valeurs réelles, on a bien $a_{-n} = \bar{a}_n$, et $|a_n| \leq |\phi|_{L^1(\mathbb{U})}$.

[†]Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

3. Supposons à présent que ϕ est continue à valeurs complexes, et notons, pour $\zeta \in \mathbb{U}$, $\phi_r(\zeta) = P_{\mathbb{D}}\phi(r\zeta)$. Démontrer que $\phi_r \rightarrow \phi$ uniformément et en déduire le théorème de Stone-Weierstrass pour le cercle.

On pose $\zeta = e^{it}$ et on écrit

$$\begin{aligned} |\phi_r(\zeta) - \phi(\zeta)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{it}, e^{i\theta}) [\phi(e^{i\theta}) - \phi(e^{it})] d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2} |\phi(e^{i\theta}) - \phi(e^{it})| d\theta. \end{aligned}$$

Il faut à présent découper l'intégrale. En fixant $\delta > 0$, on a

$$\limsup_{r \rightarrow 1^-} \int_{|\theta-t| \geq \delta} \frac{1-r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2} |\phi(e^{i\theta}) - \phi(e^{it})| d\theta = 0$$

car $\frac{1-r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2} \rightarrow 0$ uniformément en t, θ . Reste à étudier l'intégrale au voisinage de t . On choisit $\varepsilon > 0$, on va montrer que pour δ assez petit, on a

$$\limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\theta| \leq \delta} \frac{1-r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2} |\phi(e^{i\theta}) - \phi(e^{it})| d\theta \leq \varepsilon.$$

Pour ce faire, on choisit δ tel que $|\phi(e^{i\theta}) - \phi(e^{it})| < \varepsilon$ pour tous t, θ vérifiant $|t - \theta| \leq \delta$ (qui existe par continuité uniforme de ϕ) et donc

$$\begin{aligned} \int_{|t-\theta| \leq \delta} \frac{1-r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2} |\phi(e^{i\theta}) - \phi(e^{it})| d\theta &\leq \varepsilon \int_{|t-\theta| \leq \delta} \frac{1-r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2} d\theta \\ &\leq \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2} d\theta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Si l'on veut avoir $|\phi_r(e^{it}) - \phi(e^{it})| \leq \varepsilon$, il suffit en premier lieu de choisir $\delta > 0$ de sorte à ce que $\sup_{|t-\theta| \leq \delta} |\phi(e^{i\theta}) - \phi(e^{it})| < \varepsilon/2$, puis de choisir r de sorte à ce que l'intégrale sur $|\theta - t| \geq \delta$ soit $< \varepsilon/2$. Alternativement (suggéré par Martin A.) : on sait que $f := P_{\mathbb{D}}\phi$ se restreint en ϕ sur le bord et est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, elle est donc uniformément continue par le théorème de Heine. Si l'on choisit $r < 1$ de sorte que pour tout $z, z' \in \overline{\mathbb{D}}$ on a $|z - z'| \leq 1 - r \implies |f(z) - f(z')| < \varepsilon$, alors on a

$$\|\phi_r - \phi\|_{\infty} = \sup_{|z|=1} |f(rz) - f(z)| \leq \sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(rz) - f(z)| < \varepsilon$$

la dernière inégalité découlant de $|rz - z| \leq 1 - r$. On a donc bien la cvu demandée.

Reste à écrire $\phi_r(e^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n r^{|n|} e^{nit}$, qui est (à r fixé) limite uniforme de polynômes trigonométriques puisque les a_n sont bornés. On conclut alors par extraction diagonale.

Exercice 2. Le problème de Dirichlet holomorphe.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe sur le disque unité \mathbb{D} qui s'étend en une fonction continue valant $\zeta \mapsto \bar{\zeta}$ sur le cercle.

Supposons que f est une telle fonction : elle s'étend continument au disque. Comme f est holomorphe, elle vérifie $f^{(n)}(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{U}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$. Comme $f(\zeta) = \bar{\zeta} = \zeta^{-1}$ sur \mathbb{U} , cette intégrale est nulle pour tout $n \geq 0$, et f devrait être la fonction nulle.

2. De manière générale, soit ϕ une fonction continue sur le cercle unité \mathbb{U} . Démontrer qu'une condition nécessaire pour qu'il existe une fonction holomorphe f sur \mathbb{D} qui se prolonge en ϕ au bord est

$$\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) e^{ni\theta} d\theta = 0$$

pour tout $n \geq 1$.

Soit ϕ continue sur le cercle qui prolonge une fonction holomorphe f sur le disque ouvert. Comme f est holomorphe, elle vérifie nécessairement

$$\int_{\mathbb{U}} \zeta^m f(\zeta) d\zeta = 0$$

pour tout $m \geq 0$. En écrivant $f(\zeta) = \phi(\zeta)$ et en explicitant l'intégrale, on obtient

$$\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) e^{(m+1)i\theta} d\theta = 0.$$


pour tout $m \geq 0$.

3. Démontrer que cette condition est suffisante. On pourra construire séparément les parties réelle et imaginaire de la fonction recherchée.

Il existe des fonctions harmoniques u, v réelles sur \mathbb{D} s'étendant en $\Re\phi, \Im\phi$ respectivement sur le bord. Reste à vérifier que $u + iv$ est holomorphe, sachant qu'elle est donnée par

$$(u + iv)(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{it}, e^{i\theta}) \phi(e^{i\theta}) d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta r^{|n|} e^{nit}.$$

Comme $\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta = 0$ pour $n < 0$, cette fonction est clairement analytique.

 **Exercice 3. Gradient d'une fonction harmonique positive.**

1. Soit f une fonction holomorphe. Démontrer que le gradient de $\Re(f)$ est $\overline{f'}$ (vue comme application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2).

On utilise les équations de Cauchy-Riemann, qui nous enseignent que $\partial_x f = -i\partial_y f$, et par conséquent $\partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)f = \partial_x f$. Par conséquent, $\partial_x \Re(f) = \Re(\partial_x f) = \Re(\partial_z f)$. Similairement, $\partial_y \Re(f) = \Re(\partial_y f) = \Re(i\partial_x f) = -\Im(\partial_x f) = -\Im(\partial_z f)$.

2. Démontrer que le noyau de Poisson vérifie, pour $|z| < 1, |\zeta| = 1$:

$$|\nabla_z P(z, \zeta)| = \frac{2}{1 - |z|^2} P(z, \zeta).$$

Comme $P(z, \zeta) = \Re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)$, son gradient est donné par la conjuguée de la dérivée de la fonction holomorphe (en z) $\frac{\zeta+z}{\zeta-z}$. Un rapide calcul donne que la dérivée est

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{-(\zeta + z)}{(\zeta - z)^2} = \frac{2\zeta}{(\zeta - z)^2}$$

et donc

$$\nabla_z P = \frac{2\bar{\zeta}}{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2}.$$

En passant au module, on obtient

$$|\nabla_z P(z, \zeta)| = \frac{2}{|\zeta - z|^2} = \frac{2}{1 - |z|^2} P(z, \zeta).$$

3. En déduire que si u est une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}(0, \rho)$, elle vérifie pour tout $z \in \mathbb{D}(0, \rho)$ l'inégalité

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{2\rho}{\rho^2 - |z|^2} u(z).$$

Soit $r < \rho$. On peut utiliser la formule pour u avec le noyau de Poisson, à savoir pour $z \in \mathbb{D}(0, r)$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta}) u(re^{i\theta}) d\theta.$$

En notant que $P(z, r\zeta) = P(z/r, \zeta)$, on peut prendre le gradient, et en utilisant l'inégalité triangulaire, on trouve

$$\begin{aligned} |\nabla u(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \nabla_z P(z/r, e^{i\theta}) u(re^{i\theta}) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{r} (\nabla_z P)(z/r, e^{i\theta}) \right| u(e^{i\theta}) d\theta \\ &\leq \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(1-|z/r|^2)} P(z, \zeta) u(e^{i\theta}) d\theta \\ &\leq \frac{2r}{r^2 - |z|^2} u(z). \end{aligned}$$

En prenant le inf sur $r < \rho$, on trouve finalement :

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{2\rho}{\rho^2 - |z|^2} u(z).$$

4. Soit U un ouvert simplement connexe quelconque de \mathbb{C} , $z \in U$. On rappelle qu'il existe un unique biholomorphisme $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow U$ qui envoie 0 sur z et a une dérivée réelle positive, on note $R(U, z)$ cette dérivée positive. Démontrer que si u est une fonction harmonique positive sur U , alors

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{2}{R(U, z)} u(z).$$

Soit φ l'unique biholomorphisme envoyant 0 sur z de dérivée positive en 0. On pose $v = u \circ \varphi$, qui est harmonique positive sur \mathbb{D} . Elle vérifie donc

$$|\nabla v(0)| \leq 2v(0).$$

On trouve grâce à la question 1 que $\nabla v(0) = f'(\varphi(0))\varphi'(0)$ (au sens de la multiplication des nombres complexes), où f est une fonction holomorphe de partie réelle v , et donc

$$|\nabla v(0)| = R(U, z)|f'(z)| = R(U, z)|\nabla u(z)|.$$

On rentre cette égalité dans l'inégalité obtenue plus tôt, et on obtient

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{1}{R(U, z)} u(z).$$

Exercice 4. Récupération d'une fonction holomorphe depuis sa partie réelle.

Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, u sa partie réelle. Démontrer que pour $z \in \mathbb{D}$, on a

$$f(z) = i\Im f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} u(e^{i\theta}) d\theta.$$

Commençons par montrer que les deux fonctions ont même partie réelle : Il s'agit simplement de constater que

$$\Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} u(e^{i\theta}) d\theta \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) u(e^{i\theta}) d\theta = u(z) = \Re(f(z)).$$

On observe ensuite que $z \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} u(e^{i\theta}) d\theta$ est holomorphe sur \mathbb{D} : comme sa partie réelle coïncide avec celle de f , elles ne peuvent différer que d'une constante imaginaire, que l'on calcule être $\Im f(0)$ en évaluant en 0.

Exercice 5. Harmonicité d'un produit.

Soient u, v des fonctions harmoniques non-constantes sur un ouvert connexe U . Démontrer que uv est harmonique si et seulement s'il existe une constante a telle que $u + iav$ est holomorphe sur U . On pensera à écrire

$$\Delta = 4\partial\bar{\partial}.$$

On écrit $\Delta = 4\partial\bar{\partial}$, et comme $\Delta u = \Delta v = 0$, on trouve $\partial\bar{\partial}(uv) = \partial u\bar{\partial}v + \partial v\bar{\partial}u = 2\Re(\bar{\partial}u\partial v)$. Si $u + iav$ est holomorphe, alors $\bar{\partial}u = -ia\bar{\partial}v$, donc $\bar{\partial}u\partial v = -ia\bar{\partial}v\partial v = -ia|\partial v|^2$, et donc uv est harmonique. Réciproquement si $\bar{\partial}u\partial v$ est imaginaire pur, alors $\bar{\partial}u/\bar{\partial}v$ est également imaginaire pur pour $\bar{\partial}v \neq 0$. Reste à voir que $\bar{\partial}u/\bar{\partial}v$ est antiholomorphe (une fonction antiholomorphe imaginaire pure est constante). Pour ce faire, on calcule

$$\begin{aligned} 4\partial\left(\frac{\bar{\partial}u}{\bar{\partial}v}\right) &= \frac{4\partial\bar{\partial}u\bar{\partial}v - 4\bar{\partial}u\partial\bar{\partial}v}{(\bar{\partial}v)^2} \\ &= \frac{\Delta u\bar{\partial}v - \bar{\partial}u\Delta v}{(\bar{\partial}v)^2} = 0. \end{aligned}$$

Exercice 6. Invariance par biholomorphismes.

Soient U, V deux ouverts de \mathbb{C} , $\varphi : U \rightarrow V$ un biholomorphisme entre ces deux ouverts. Pour $u \in C^2(V, \mathbb{R})$, démontrer que

$$\Delta(u \circ \varphi) = (\Delta u) \circ \varphi \cdot |\varphi'|^2.$$

et en déduire la précomposition par un biholomorphisme préserve les fonctions harmoniques et sous-harmoniques. On calcule $4\partial\bar{\partial}(u \circ \varphi)$. J'affirme que pour u, φ juste C^1 , on a

$$\partial(u \circ \varphi) = \partial u \circ \varphi \cdot \partial\varphi + \bar{\partial}u \circ \varphi \cdot \partial\bar{\varphi}$$

et

$$\bar{\partial}(u \circ \varphi) = \partial u \circ \varphi \cdot \bar{\partial}\varphi + \bar{\partial}u \circ \varphi \cdot \bar{\partial}\bar{\varphi}.$$

Autrement dit, z, \bar{z} se comportent comme deux coordonnées indépendantes.

Pour prouver cette égalité, on considère $u \circ \varphi$ comme une fonction de U dans \mathbb{C} , de se rappeler que $d_a(u \circ \varphi) = d_{\varphi(a)}u \circ d_a\varphi$ en tant qu'applications \mathbb{R} -linéaires de \mathbb{C} dans lui-même. De là, il suffit d'écrire $du = \partial u dz + \bar{\partial}u d\bar{z}$ et $d\varphi = \partial\varphi dz + \bar{\partial}\varphi d\bar{z}$.

De là, on tire que pour φ holomorphe,

$$\bar{\partial}(u \circ \varphi) = \bar{\partial}u \circ \varphi \cdot \bar{\partial}\varphi$$

et $\bar{\partial}\bar{\varphi} = \overline{\partial\varphi}$. Ainsi,

$$\partial\bar{\partial}(u \circ \varphi) = \partial(\bar{\partial}u \circ \varphi \cdot \bar{\partial}\varphi) = \partial\bar{\partial}u \circ \varphi \cdot \partial\varphi\bar{\partial}\varphi$$

car $\partial\bar{\partial}\bar{\varphi} = 0$. C'est exactement le résultat recherché à multiplication par 4 près.

Exercice 7. Fonctions harmoniques sur des anneaux.

Soit A l'anneau $r < |z| < R$, et u une fonction harmonique sur A . On va démontrer que u est de la forme $\Re f(z) + \alpha \log |z|$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Soit $g = 2\partial u$. Démontrer que g est holomorphe.

$$4\partial\bar{\partial} = \Delta, \text{ donc } \bar{\partial}(2\partial u) = 0.$$

2. Démontrer qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}$, pour laquelle on donnera une formule intégrale, telle que $g(z) - \frac{\alpha}{z}$ admette une primitive f sur A .

Les fonctions holomorphes sur l'anneau A sont données par les séries de Laurent convergentes de la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Une telle série admet une primitive si et seulement si $a_{-1} = 0$, et on peut récupérer a_{-1} comme

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\rho e^{i\theta}) \rho e^{i\theta} d\theta$$

pour $r < \rho < R$.

3. Démontrer que $\alpha \in \mathbb{R}$.

On développe $g(\rho e^{i\theta})e^{i\theta} = (\cos(\theta)\partial_x u + \sin(\theta)\partial_y u) + i(\sin(\theta)\partial_x u - \cos(\theta)\partial_y u)$.

On reconnaît alors que $\Im(\rho g(\rho e^{i\theta})e^{i\theta}) = -\frac{d}{d\theta}(u(\rho e^{i\theta}))$, et donc

$$\begin{aligned}\Im\left(\int_0^{2\pi} g(\rho e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta\right) &= \int_0^{2\pi} \Im(g(\rho e^{i\theta})e^{i\theta}) d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} u(\rho e^{i\theta}) d\theta \\ &= -u(\rho e^{i\theta})\Big|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\Im(\alpha) = 0$.

Alternativement, on peut écrire $du = \partial u dz + \bar{\partial} u d\bar{z}$, c'est une 1-forme sur A . En notant $i : S \rightarrow A$ l'injection du cercle S de rayon ρ dans A , on a $i^* du = d(i^* u)$ (la restriction de du à S est la dérivée extérieure de la restriction de u à S). La formule de Stokes donne alors $\int_S i^* du = 0$, et donc

$$\int_S \partial u dz = -\int_S \bar{\partial} u d\bar{z}.$$

Comme u est à valeurs réelles, $\bar{\partial} u d\bar{z} = \overline{\partial u dz}$, et on en déduit que $2i\pi\alpha = \int_S \partial u dz$ est égal à l'inverse de son conjugué, et est donc un nombre imaginaire pur, donc α est réel.

4. Démontrer que $u = \Re(f) + \alpha \log|z| + C$ pour une certaine constante C .

Considérons $v = \Re(f) + \alpha \log|z|$, et démontrons qu'elle est constante. Pour ce faire, on écrit localement $\log|z| = \Re(\log(z))$, et donc localement $v = \Re(f + \alpha \log(z))$. On va montrer que $\partial_x v = \partial_x u$ et $\partial_y v = \partial_y u$, ce qui montrera que $u = v$. Pour ce faire, on peut procéder de bien des manières. Par exemple, on peut se rappeler que pour h holomorphe, on a $\partial_x h = h'$ et $\partial_y h = ih'$. On calcule alors

$$\partial_x v = \Re(\partial_x f + \alpha \partial_x \log(z)) = \Re(g - \alpha/z + \alpha/z) = \Re(g) = \partial_x u$$

et

$$\partial_y v = \Re(\partial_y f + \alpha \partial_y \log(z)) = \Re(ig - i\alpha/z + i\alpha/z) = -\Im(g) = \partial_y u.$$

Ainsi, u et v diffèrent d'une constante.

Exercice 8. Fonctions pluriharmoniques

On a vu dans un TD précédent qu'une fonction harmonique sur \mathbb{C}^n n'est pas nécessairement, même pas localement, la partie réelle d'une fonction holomorphe (c'est-à-dire une fonction $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie $\partial_j f = 0$ pour tout j).

Une fonction $u : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite pluriharmonique si elle vérifie $\partial_j \bar{\partial}_k u = 0$ pour tous j, k , où

$$\partial_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \bar{\partial}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

où x_j, y_j désignent les parties réelles et imaginaires des coordonnées z_1, \dots, z_n sur \mathbb{C}^n .

1. Démontrer que la partie réelle d'une fonction holomorphe sur un ouvert de \mathbb{C}^n est pluriharmonique.

Comme $\bar{\partial}_k f = 0$ pour tout k , nécessairement $\partial_j \bar{\partial}_k f = 0$. De même, comme $\partial_j \bar{f} = 0$ on a $\partial_j \bar{\partial}_k \bar{f} = 0$. En faisant la moyenne, on trouve $\partial_j \bar{\partial}_k \Re(f) = 0$.

2. Soit $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ un champ de vecteurs C^0 sur un ouvert convexe U de \mathbb{R}^n . Supposons qu'il vérifie $\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ pour tous j, k . Démontrer que la fonction définie sur U

$$F : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \int_0^{x_1} f_1(t, x_2, \dots, x_n) dt$$

vérifie $\nabla F = \mathbf{f}$.

La fonction F est bien définie par convexité de U . Pour voir que $\nabla F = \mathbf{f}$, on calcule $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ pour $j > 1$, vu

que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ par définition.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_j} &= \int_0^{x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(t, x_2, \dots, x_n) dt \\ &= \int_0^{x_1} \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) dt \\ &= f_j(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

3. Démontrer que si u est pluriharmonique sur un voisinage de 0 de la forme $|z_i| < r_i$, alors en identifiant \mathbb{C}^n à \mathbb{R}^{2n} , le champ de vecteurs

$$\mathbf{f}_u = \left(-\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial u}{\partial y_n}, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

vérifie la condition de la question précédente. On pensera à calculer $\Re(\partial_j \bar{\partial}_k u)$ et $\Im(\partial_j \bar{\partial}_k u)$.

La condition $\Re(\partial_j \bar{\partial}_k u) = 0$ se traduit précisément en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} = 0.$$

Si l'on note $f_{u,2j-1} = -\frac{\partial u}{\partial y_j}$ et $f_{u,2j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, l'équation ci-dessus devient

$$\frac{\partial f_{u,2k}}{\partial x_j} = \frac{\partial f_{u,2j-1}}{\partial y_k}.$$

Le fait que

$$\frac{\partial f_{u,2k-1}}{\partial x_j} = \frac{\partial f_{u,2j-1}}{\partial x_k}$$

et

$$\frac{\partial f_{u,2k}}{\partial y_j} = \frac{\partial f_{u,2j}}{\partial y_k}$$

découle du fait que

$$0 = 4\Im(\partial_j \bar{\partial}_k u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial x_k}.$$

On note v une fonction telle que $\nabla v = \mathbf{f}_u$, qui existe bien car les polydisques (définis par $|z_i| < r_i$) sont convexes.

4. Vérifier que $\bar{\partial}_j v = i\bar{\partial}_j u$ pour tout j et en déduire que $u + iv$ est holomorphe.

La condition $\nabla v = \mathbf{f}_u$ garantit que $\frac{\partial v}{\partial x_j} = -\frac{\partial u}{\partial y_j}$ et $\frac{\partial v}{\partial y_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$. Cette égalité se réécrit précisément $\bar{\partial}_j v = i\bar{\partial}_j u$, ou encore $\bar{\partial}_j(u + iv) = 0$, donc $u + iv$ est holomorphe.

Fonctions sous-harmoniques.

Exercice 9. Inégalité de la moyenne et principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques C^2 .

Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} et $u \in C^2(U, \mathbb{R})$. On dit que u est (strictement) sous-harmonique si $\Delta u \geq 0$ (respectivement $\Delta u > 0$).

1. Soit $u \in C^2(U, \mathbb{R})$, $z \in U$, $\rho > 0$ tel que $\mathbb{D}(0, \rho) \subseteq U$. Démontrer que pour $r < \rho$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta = u(z) + \frac{r^2}{4} \Delta u(z) + o(r^2)$$

et en déduire que les fonctions strictement sous-harmoniques vérifient l'inégalité de la moyenne locale : pour tout $z \in U$, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $r < \rho$, on a

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

On fait un développement limité de u à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} u(z + re^{i\theta}) &= u(z) + \partial_x u(z)r \cos(\theta) + \partial_y u(z)r \sin(\theta) \\ &+ \frac{r^2}{2} (\partial_x^2 u(z) \cos^2(\theta) + \partial_y^2 u(z) \sin^2(\theta) + 2\partial_x \partial_y u(z) \sin(\theta) \cos(\theta)) + o(r^2). \end{aligned}$$

à l'intégration, tous les termes autres que $u(z)$, $\frac{r^2}{2} \partial_x^2 u(z) \cos^2(\theta)$ et $\frac{r^2}{2} \partial_y^2 u(z) \sin^2(\theta)$ (et le $o(r^2)$) disparaissent. Les termes restants s'intègrent respectivement à $u(z)$, $\frac{r^2}{4} \partial_x^2 u(z)$ et $\frac{r^2}{4} \partial_y^2 u(z)$, ce qui donne l'estimation.

Pour r suffisamment petit, le $o(r^2)$ est petit devant $r^2 \Delta u(z)$, ce qui implique que

$$u(z) \leq u(z) + \frac{r^2}{4} \Delta u(z) + o(r^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

2. Soit u une fonction sous-harmonique. En considérant $z \mapsto u(z) + \varepsilon|z|^2$, démontrer que u satisfait l'inégalité de la moyenne.

Si u est sous-harmonique, $u + \varepsilon|z|^2$ est strictement sous-harmonique. On trouve donc

$$u(z) + \varepsilon|z|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} |z + re^{i\theta}|^2 d\theta.$$

En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve l'inégalité de la moyenne pour u .

3. On va exploiter cette propriété pour démontrer que les fonctions sous-harmoniques vérifient le principe du maximum.

- (a) Soit u sous-harmonique sur U connexe. Démontrer que si u admet un maximum global, alors elle est constante.

Soit $M = u(z)$ le maximum global de u . On pose $X \subseteq U$ l'ensemble des points où $u = M$ et Y l'ensemble des points où $u < M$. Y est clairement ouvert. L'inégalité de la moyenne dit que si $u(z) = M$ alors on a pour tout r assez petit $M \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta$, ce qui n'est possible que si $u(z + re^{i\theta}) = M$ pour tout θ , tout r assez petit donc sur un voisinage de z . X est donc ouvert, son complémentaire Y est ouvert, et donc $X = U$.

- (b) Soit $K \subseteq U$ compact. Démontrer que u atteint son maximum sur K au bord de K .

Si u admet son maximum en z dans l'intérieur de K , elle est constante sur la composante connexe de K correspondante et atteint donc son maximum au bord de cette composante connexe.

- (c) Supposons que U est borné, et que $\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0$ pour tout $\zeta \in \partial U$: démontrer que $u \leq 0$ sur U .

On considère une suite croissante de compacts K_n vérifiant $\bigcup_n K_n = U$, par exemple $K_n = \{z \in U : d(z, \partial U) \geq 1/n\}$. Par l'absurde, si jamais $u(z) = a > 0$ alors $\sup_{z \in \partial K_n} u(z) \geq a$ pour n assez grand, et on peut donc trouver une suite de $(z_n)_n$, $z_n \in \partial K_n$ vérifiant $u(z_n) \geq a$ pour tout n . Ces z_n s'accroissent en un point du bord de U car \bar{U} est compact, ce qui contredit $\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0$.

4. Soit $\bar{\mathbb{D}}(z, \rho) \subseteq U$. Démontrer que

$$u \leq P_{\mathbb{D}(z, \rho)}(u|_{\partial \mathbb{D}(z, \rho)})$$

sur $\mathbb{D}(z, \rho)$ et en déduire que u vérifie l'inégalité de la moyenne globale, c'est-à-dire que si $\bar{\mathbb{D}}(z, \rho) \subseteq U$ alors

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Soit v la fonction harmonique $P_{\mathbb{D}(z,\rho)}(u|_{\partial\mathbb{D}(z,\rho)})$. La fonction $u - v$ est sous-harmonique sur $\mathbb{D}(z,\rho)$ car $\Delta(u - v) = \Delta(u) \geq 0$ et vérifie $\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) - v(z) = 0$ pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}(z,\rho)$. Par conséquent, $u - v \leq 0$ sur $\mathbb{D}(z,\rho)$, donc $u \leq v$. Il suffit à présent d'appliquer l'égalité précédente en z pour obtenir l'inégalité de la moyenne globale.

Exercice 10. Potentiel d'une mesure.

Soit μ une mesure de Radon sur \mathbb{C} . On dit qu'une fonction $p \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ est un potentiel de μ si $\Delta p = \mu$ au sens des distributions, c'est-à-dire que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, on a

$$\int_{\mathbb{C}} p(z) \Delta \varphi(z) d\lambda(z) = \int_{\mathbb{C}} \varphi(z) d\mu(z).$$

1. Trouver un potentiel de la mesure de Lebesgue.

On peut choisir par exemple $\frac{x^2+y^2}{4}$. C'est effectivement un potentiel au vu du fait que pour $f \in C^2(\mathbb{C})$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, on a l'égalité

$$\int_{\mathbb{C}} f(z) \delta \varphi(z) d\lambda(z) = \int_{\mathbb{C}} \nabla f(z) \cdot \nabla \varphi(z) d\lambda(z) = \int_{\mathbb{C}} \Delta f(z) \varphi(z) d\lambda(z).$$

On rappelle que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, on a :

$$\int_{\mathbb{C}} \log |z| \Delta \varphi(z) d\lambda(z) = 2\pi \varphi(0)$$

2. Trouver un potentiel de la masse de dirac δ_w en w .

L'équation précédente implique précisément que $\frac{1}{2\pi} \log |z - w|$ est un potentiel de la masse de Dirac.

3. Si μ est à support compact, on définit

$$U_\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \log |z - w| d\mu(w).$$

Démontrer que U_μ (qui peut valoir $-\infty$ en certains points) est un potentiel de μ , et qu'elle est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus \text{Supp}(\mu)$.

Si μ est à support compact, on définit

$$U_\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \log |z - w| d\mu(w).$$

On pose $K = \text{Supp}(\mu)$, commençons par montrer l'harmonicité sur $\mathbb{C} \setminus K$: Comme μ est finie à support compact et que $z \mapsto \log |z - w|$ est C^∞ pour tout $w \in K, z \notin K$, le laplacien commute à l'intégrale, et comme $\log |z - w|$ est harmonique en z , on a $\Delta(U_\mu|_{\mathbb{C} \setminus K}) = 0$.

Pour montrer que c'est un potentiel de μ , on fait essentiellement le calcul suivant : U_μ est la convolution de $\log |z|$ avec μ , vus en tant que distribution et distribution à support compact. Comme $\partial_x(S * T) = (\partial_x S) * T = S * (\partial_x T)$ pour S distribution et T distribution à support compact, on trouve

$$\Delta(\log |z| * \mu) = (\Delta \log |z|) * \mu = \delta_0 * \mu = \mu.$$

On peut également faire un calcul plus low-tech en appliquant le théorème de Fubini à l'intégrale

$$\int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} \log |z - w| \Delta \varphi(z) d\mu(w) d\lambda(z).$$

4. Démontrer que pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\int_0^{2\pi} \log |z - e^{i\theta}| d\theta = 2\pi \log^+ |z|$$

où $\log^+ t$ désigne $\max(\log(t), 0)$.

Si $|z| > 1$, il existe une détermination holomorphe de $w \mapsto \log(z-w)$ au voisinage du disque unité fermé.

Par la formule de Cauchy, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(z - e^{i\theta}) d\theta = \log(z)$$

et en passant aux parties réelles on a l'égalité voulue.

Pour le cas $|z| < 1$, on observe que l'intégrale ne dépend que de $r = |z|$. On dérive

$$\partial_r \int_0^{2\pi} \log |r - e^{i\theta}| d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r - e^{i\theta}} d\theta = -i \int_0^{2\pi} \frac{dz}{z(r-z)}.$$

On calcule $\frac{r}{z(r-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{r-z}$, la fonction a donc deux pôles dans le disque et les résidus sont 1, -1 respectivement, donc la somme est 0 et l'intégrale est nulle. Par continuité, l'intégrale est également nulle quand $|z| = 1$.

5. Démontrer que U_μ vérifie l'inégalité de la moyenne. Est-elle toujours de classe C^2 ?

On commence par vérifier que $\log |z|$ vérifie l'inégalité de la moyenne. Soit $r > 0$, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z - re^{i\theta}| d\theta &= \log(r) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z/r - e^{i\theta}| d\theta \\ &= \log(r) + \log^+ |z/r| \\ &\geq \log |z|. \end{aligned}$$

C'est suffisant pour calculer :

$$\begin{aligned} U_\mu(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \log |z - w| d\mu(w) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z - w + re^{i\theta}| d\theta d\mu(w) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \log |z + re^{i\theta} - w| d\mu(w) \right) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_\mu(z + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

$z \mapsto \log^+ |z|$ n'est même pas de classe C^1 . En fait, le mieux qu'on peut prouver (à l'aide du lemme de Fatou) est que U_μ est semi-continue inférieurement à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, c'est-à-dire que $\limsup_{w \rightarrow z} U_\mu(w) \leq U_\mu(z)$.

C'est le mieux qu'on puisse faire, étant donné que par exemple, la fonction

$$z \mapsto \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \log |z - 2^{-n}|$$

qui est le potentiel de $\mu = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \delta_{2^{-n}}$, est discontinue en 0.